

Dr Michał Kosztołowicz – matematyczny model edukacji

Kieleckie Towarzystwo Naukowe w Kielcach

Towarzystwo Naukowe Sandomierskie w Sandomierzu

Tok lekcyjny w układach łańcuchów Markowa

1. Herbartowski tok lekcyjny.

Współcześnie lekcja przebiega zgodnie z tak zwanym herbartowskim tokiem lekcyjnym, który można wyobrazić sobie następująco (rys. 1)



Rys. 1

Metody prowadzenia lekcji w tym toku to: akroamatyka, erotematyka, heureza, dyskusja.

Realizują się w nim wszyscy uczniowie, a wiemy, że mają oni różne możliwości intelektualne. Nie mogą jednak realizować się w nim na miarę swoich możliwości intelektualnych ze względu na liniowość toku lekcyjnego.

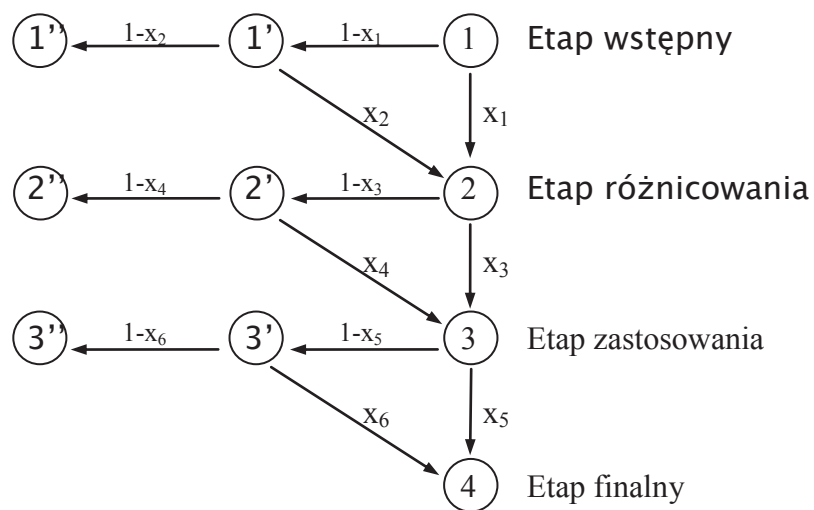


Tabela 1

1	1'	1''	2	2'	2''	3	3'	3''	4
a			b			c			d
							c-d		d ₁
								c-d-d ₁	
			b-c			k			d ₂
							k-d ₂		d ₃
								k-d ₂ -d ₃	
	a-b		m			m ₁			d ₄
							m ₁ -d ₄		d ₅
		a-b-m						m ₁ -d ₄ -d ₅	
			m-m ₁			k			d ₆
							m ₂ -d ₆		d ₇
					m-m ₁ -m ₂			m ₂ -d ₆ -d ₇	

Litery w tabeli 1 oznaczają liczbę uczniów np. w szkolnej klasie. Tabelę należy czytać:

W etapie 1 była liczba uczniów – **a**. Z etapu 1 do etapu 2 „przeszło” **b** uczniów, z kolei z etapu 2 do etapu 3 „przeszło” **c** uczniów, a z etapu 3 do etapu 4 „przeszło” **d** uczniów. „Przejścia” uczniów z etapu do etapu bezpośrednio bądź przez stany korektywne utożsamiamy z krokami.

I tak w 3 krokach do etapu 4 – finalnego bez korzystania ze stanów korektywnych „przeszło” uczniów – **d**. Analogicznie czytamy pozostałe sytuacje w tabeli 1.

Prawdopodobieństwa „przejścia” z etapu do etapu definiujemy następująco: jest to stosunek liczby uczniów z etapu następnego do liczby uczniów z etapu poprzedniego.

W naszym przypadku mamy zgodnie z zasadą łańcuchów Markowa dla układu

$$\text{niejednorodnego (tabela 1): } P(3) = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{d}{a}$$

Gdy uczniowie korzystają w 3 etapie ze stanu korektywnego **3'**, to prawdopodobieństwo „dojścia” uczniów do etapu finalnego jest następujące (tabela 1):

$$P_{3'}(4) = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{c-d}{c} \cdot \frac{d_1}{c-d} = \frac{d_1}{a}$$

Zauważamy, że odpowiednie prawdopodobieństwa „przejścia” z etapu 1 do 4 – finalnego możemy obliczać bezpośrednio z tabeli 1, ponieważ jest to zgodne z modelem rys. 1.

Mamy bowiem dla przykładu, gdy uczniowie korzystają w 2 etapie ze stanu korektywnego $2'$:

$$x_1 = \frac{b}{a}; \quad 1 - x_3 = \frac{b-c}{b}; \quad x_4 = \frac{k}{b-c}; \quad x_5 = \frac{d_2}{k}$$

Stąd otrzymujemy:

$$P_{2'}(4) = x_1 \cdot (1 - x_3) \cdot x_4 \cdot x_5 = \frac{b}{a} \cdot \frac{b-c}{b} \cdot \frac{k}{b-c} \cdot \frac{d_2}{k} = \frac{d_2}{a}$$

Analogicznie postępując, obliczamy odpowiednie prawdopodobieństwa na podstawie tabeli 1 i otrzymujemy:

$$P_{1'}(4) = \frac{a-b}{a} \cdot \frac{m}{a-b} \cdot \frac{m_1}{m} \cdot \frac{d_4}{m_1} = \frac{d_4}{a}$$

$$P_{2'3'}(5) = \frac{b}{a} \cdot \frac{b-c}{b} \cdot \frac{k}{b-c} \cdot \frac{k-d_2}{k} \cdot \frac{d_3}{k-d_2} = \frac{d_3}{a}$$

$$P_{1'2'}(5) = \frac{a-b}{a} \cdot \frac{m}{a-b} \cdot \frac{m-m_1}{m} \cdot \frac{m_2}{m-m_1} \cdot \frac{d_6}{m_2} = \frac{d_6}{a}$$

$$P_{1'3'}(5) = \frac{a-b}{a} \cdot \frac{m}{a-b} \cdot \frac{m_1}{m} \cdot \frac{m_1-d_4}{m_1} \cdot \frac{d_5}{m_1-d_4} = \frac{d_5}{a}$$

$$P_{1'2'3'}(6) = \frac{a-b}{a} \cdot \frac{m}{a-b} \cdot \frac{m-m_1}{m} \cdot \frac{m_2}{m-m_1} \cdot \frac{m_2-d_6}{m_2} \cdot \frac{d_7}{m_2-d_6} = \frac{d_7}{a}$$

Rezultaty lekcji uwzględniając wszystkie prawdopodobieństwa „dojścia” uczniów do etapu finalnego, określamy:

$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{P(3) + P_{3'}(4) + P_{2'}(4) + P_{1'}(4) + P_{2'3'}(5) + P_{1'2'}(5) + P_{1'3'}(5) + P_{1'2'3'}(6)}{a} = \\ &= \frac{d + d_1 + d_2 + d_4 + d_3 + d_6 + d_5 + d_7}{a} \end{aligned}$$

Konkluzja

Uczniowie, którzy opanowali materiał nauczania (osiągnęli etap finalny) w najmniejszej liczbie kroków to uczniowie o największych możliwościach intelektualnych.

Uczniowie, którzy opanowali materiał nauczania w największej liczbie kroków (osiągnęli etap finalny) to uczniowie o najmniejszych możliwościach intelektualnych.

Jeżeli uczniowie opanowują materiał nauczania (osiągają etap finalny) w pośredniej liczbie kroków tzn. między najmniejszą a największą liczbą kroków, to uczniowie ci mają średnie możliwości intelektualne. Jest to zgodne z badaniami, że możliwości uczniów zbliżone są do rozkładu normalnego. Stąd wynika, iż prowadzenie lekcji według układu łańcuchów Markowa umożliwia kształcenie uczniów na miarę ich możliwości intelektualnych.

Bibliografia

M. Kosztołowicz: Możliwości wykorzystania wybranych metod matematycznych do szacowania rezultatów kształcenia, Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. J. Kochanowskiego, Kielce 1988

M. Kosztołowicz: Metody badania funkcjonalności testów i pomocy naukowych, Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. J. Kochanowskiego, Kielce 1982